PART3　漸化式と数学的帰納法

3　[1]　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

[2]　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。すべての自然数 n について $a_n>a_{n+1}>1$ が成り立つことを示せ。

Point Pickup

[1]　a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 から一般項を推測し，それが正しいことを，与えられた漸化式を用いて数学的帰納法にて証明する。

[2]　まず，$a_n>1$ であることを数学的帰納法で証明し，$a_n>1$ を用いて $a_n>a_{n+1}$ を示す。

第 4 講　PART3　確認問題

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

$$a_2=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad a_3=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad a_4=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

(2)　一般項 a_n を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

（証明）

(1)より，$a_n=\boxed{\text{キ}}$ ……(＊)と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=1$ より，(＊)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\boxed{\text{ク}}}{3-\boxed{\text{ク}}}=\boxed{\text{ケ}}$$

よって，$n=\boxed{\text{コ}}$ のときにも(＊)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[$\boxed{\text{キ}}$ の選択肢]

①　$\dfrac{n+1}{2}$　②　$\dfrac{2n-1}{n}$　③　$\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$　④　$\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}}$

[$\boxed{\text{ク}}$ の選択肢]

①　$k+1$　②　$\dfrac{k+1}{2}$　③　$\dfrac{k+2}{2}$

④　$\dfrac{2k-1}{k}$　⑤　$\dfrac{2k+1}{k+1}$　⑥　$\dfrac{2k-1}{2^{k-1}}$

⑦　$\dfrac{2k+1}{2^k}$　⑧　$\dfrac{3^{k-1}}{2^{k-1}}$　⑨　$\dfrac{3^k}{2^k}$

[ケ の選択肢]

① $k+1$　② $\dfrac{k+1}{2}$　③ $\dfrac{(k+1)+1}{2}$

④ $\dfrac{2(k+1)-3}{(k+1)-1}$　⑤ $\dfrac{2(k+1)-1}{k+1}$

⑥ $\dfrac{2(k+1)-3}{2^{(k+1)-2}}$　⑦ $\dfrac{2(k+1)-1}{2^{(k+1)-1}}$

⑧ $\dfrac{3^{(k+1)-2}}{2^{(k+1)-2}}$　⑨ $\dfrac{3^{(k+1)-1}}{2^{(k+1)-1}}$

[コ の選択肢]

① $n-1$　② $n+1$

③ $k-1$　④ k　⑤ $k+1$

2 $a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{8}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

すべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1) $a_n>4$

(2) $a_n>a_{n+1}$

(証明)

(1) $a_n>4$ ……(∗)とする。

[1] $n=1$ のとき　$a_1=5>4$ より(∗)は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(∗)が成り立つと仮定すると

$a_k>4$

この仮定のもとで，$a_{k+1}>$ サ すなわち

$a_{k+1}-$ サ >0 を示せばよい。

このとき

$$a_{k+1}-\boxed{サ}=\frac{a_k}{2}+\frac{8}{a_k}-\boxed{サ}$$

$$=\frac{\left(a_k-\boxed{シ}\right)^2}{\boxed{ス}\,a_k}$$

仮定より，$a_k>4$ であるから

$$\left(a_k-\boxed{シ}\right)^2>0,\ \boxed{ス}a_k>0$$

したがって

$$a_{k+1}-\boxed{サ}>0 \quad すなわち \quad a_{k+1}>\boxed{サ}$$

よって，$n=\boxed{セ}$ のときにも（＊）が成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

(2)
$$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\right)=\frac{\boxed{ソ}}{2a_n}$$

(1)より，$a_n>4$ であるから $\dfrac{\boxed{ソ}}{2a_n}>\boxed{タ}$

よって　$a_n>a_{n+1}$

[$\boxed{サ}$ の選択肢]

① 1　② a_{k-1}　③ a_k　④ 4

[$\boxed{セ}$ の選択肢]

① $n-1$　② $n+1$

③ $k-1$　④ k　⑤ $k+1$

[$\boxed{ソ}$ の選択肢]

① a_n+4　② a_n-4

③ ${a_n}^2+16$　④ ${a_n}^2-16$

PART3　漸化式と数学的帰納法

3　[1]　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

[2]　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。すべての自然数 n について $a_n>a_{n+1}>1$ が成り立つことを示せ。

[1]　(1)　$a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$　　$a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$　　$a_5=(-7)^2+2\cdot4\cdot(-7)-2=-9$

(2)　(1)より，$a_n=-2n+1$ …… ① と推測される。

(I)　$n=1$ のとき　$a_1=-2\cdot1+1=-1$ より，①は成り立つ。

(II)　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$a_k=-2k+1$$

このとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k{}^2+2ka_k-2\\&=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2=-2k-1=-2(k+1)+1\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I)，(II)より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

[2]　$a_n>1$ …… ①とする。

(I)　$n=1$ のとき　$a_1=2>1$ より，①は成り立つ。

(II)　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると　$a_k>1$ より　$\dfrac{1}{a_k}<1$

このとき

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}>2-1=1$$

したがって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I)，(II)より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

よって　$a_{n+1}>1$

次に，$a_n > a_{n+1}$ を示す。

$a_n > 1$ より

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(2 - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{{a_n}^2 - 2a_n + 1}{a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} > 0$$

よって　$a_n > a_{n+1}$

したがって　$a_n > a_{n+1} > 1$ が成り立つ

第 4 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：5，エ：3，オ：7，
カ：4，キ：②，ク：④，ケ：⑤，コ：⑤

[解説]

(1) $a_2=\dfrac{4-1}{3-1}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

$$a_3=\frac{4-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

$$a_4=\frac{4-\frac{5}{3}}{3-\frac{5}{3}}=\mathbf{\frac{7}{4}}$$

(2) (1)より，$a_n=\mathbf{\dfrac{2n-1}{n}}$ ……(＊)と推測される。 [A]

[1] $n=1$ のとき

$a_1=\dfrac{2-1}{1}=1$ より，(＊)は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{2k-1}{k}$$

このとき

$$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\mathbf{\frac{2k-1}{k}}}{3-\frac{2k-1}{k}}$$ [B]

$$=\frac{2k+1}{k+1}=\mathbf{\frac{2(k+1)-1}{k+1}}$$

よって，$n=\mathbf{k+1}$ のときにも(＊)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[A]　推測した a_n が正しいことを，与えられた漸化式を用いて数学的帰納法にて証明する。

[B]　漸化式を利用する。

2 **[正解]** サ：④，シ：4，ス：2，セ：⑤，ソ：④，
タ：0

[解説]

(1) $a_n > 4$ ……(＊)とする。

[1] $n=1$ のとき [C]

$a_1 = 5 > 4$ より(＊)は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_k > 4$$

この仮定のもとで，$a_{k+1} > 4$ すなわち $a_{k+1}-4>0$ を示せばよい。

このとき

$$a_{k+1}-4 = \frac{a_k}{2}+\frac{8}{a_k}-4$$ [B]

$$= \frac{a_k{}^2+16-8a_k}{2a_k}$$

$$= \frac{(a_k-4)^2}{2a_k}$$

仮定より，$a_k > 4$ であるから

$$(a_k-4)^2 > 0,\ 2a_k > 0$$

したがって，$\dfrac{(a_k-4)^2}{2a_k} > 0$ であるから

$$a_{k+1}-4 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_{k+1} > 4$$

よって，$n = \boldsymbol{k+1}$ のときにも(＊)が成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[C]　数学的帰納法を用いて証明する。

(2)　$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{8}{a_n}\right)=\dfrac{a_n}{2}-\dfrac{8}{a_n}$

$$=\boldsymbol{\frac{a_n{}^2-16}{2a_n}}$$

(1)より，$a_n>4$ であるから　$a_n{}^2>16$ [D]

ゆえに　$\dfrac{a_n{}^2-16}{2a_n}>\mathbf{0}$

よって　$a_n-a_{n+1}>0$　すなわち　$a_n>a_{n+1}$

[D]　$a_n>4$ を利用して $a_n>a_{n+1}$ を示す。